Лекция 12

Тема. Функции нескольких переменных: предел, непрерывность, дифференцируемость.

План лекции:

1. *Понятие функции нескольких переменных. Область определения*
2. *Предел функции многих переменных в точке по Гейне и по Коши. Повторные пределы. Непрерывность.*
3. *Частные производные первого порядка.*
4. *Дифференцируемость. Дифференциал первого порядка. Инвариантность формы первого дифференциала.*
5. *Частные производные и дифференциалы высших порядков.*
6. *Множества уровня. Градиент. Производная по направлению.*

§1. Понятие функции двух и многих переменных. Область определения.

Остановимся сначала на случае двух независимых переменных, которые будем обозначать буквами x и y. Каждой паре значений x и y соответствует точка на плоскости OXY, координатами которой они служат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть D-некоторое множество точек на плоскости Oxy. Величина z называется *функцией двух независимых переменных* x и y, определенная в области D, если каждой точке этого множества соответствует одно определенное значение величины z. Записывают $z = f(x, y)$.

Число z называется значением функции f в точке (x;y). Переменную z называют зависимой переменной, а переменные x и y – независимыми переменными (или аргументами); множество D – *областью определения* функции. Упорядоченная пара значений x и y называется *точкой* M(x;y), соответственно, функция двух переменных - функцией этой точки $z = f(M)$. Областью определения функции в этом случае является некоторое множество $\{M\}$ точек плоскости.

Область определения функции $\mathbf{z} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ может представлять собой:

- часть плоскости, ограниченную замкнутой кривой, причем точки этой кривой могут как принадлежать, так и не принадлежать области определения;
- всю плоскость;
- совокупность нескольких частей плоскости.

Аналогично определяется функция трех и более независимых переменных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Величина z является функцией независимых переменных величин $x_1, x_2, ..., x_n$, если каждой рассматриваемой совокупности этих величин соответствует одно определенное значение величины z. Записывают: $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Графиком функции f является подмножество G пространства R_{n+1}, состоящее из точек вида:

$$G = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D, y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)\}.$$

Обычно график функции двух переменных изображается в виде поверхности в трехмерном пространстве. Примером такой поверхности является горная местность, где высота над уровнем моря является функцией от положения точки на карте.

<u>Пример 1.</u> Найти область определения функции $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

Решение. Функция z принимает действительные значения при условии $9 - x^2 - y^2 \geq 0$, то есть $x^2 + y^2 \leq 9$. Следовательно, областью определения данной функции является круг радиусом $R = 3$ с центром в точке $(0,0)$, включая граничную окружность, то есть $D = \{(x, y) \in R_2 : x^2 + y^2 \leq 3^2\}$.

<u>Пример 2.</u> Найти область определения функции $z = \arccos\dfrac{x}{x + y}$.

Решение. Эта функция определена, если $\left|\dfrac{x}{x+y}\right| \le 1$, $y \ne -x$, то есть $|x| \le |x+y|$, $y \ne -x$. Возведя в квадрат обе части предыдущего неравенства, получим $x^2 \le x^2 + 2xy + y^2$, то есть $2xy + y^2 \ge 0$. Далее, имеем $\begin{cases} y(2x+y) \ge 0, \\ y \ne -x. \end{cases}$ Данная система будет выполняться, если выполняется одно из следующих соотношений $\begin{cases} y \ge 0, \\ 2x+y \ge 0, \\ y \ne -x. \end{cases}$ либо $\begin{cases} y \le 0, \\ 2x+y \le 0, \\ y \ne -x. \end{cases}$

В итоге, область определения функции z можно записать в виде

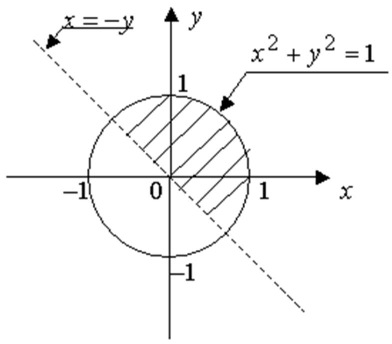
$$D = \left\{ (x,y) \in R_2 : (x,y) \ne (0,0), \begin{cases} y \ge 0, \\ 2x+y \ge 0, \end{cases} \text{ либо } \begin{cases} y \le 0, \\ 2x+y \le 0. \end{cases} \right\}.$$

Геометрически D состоит из двух тупых углов, образованных прямыми $y = 0,\ y = -2x$, включая границы без точки $(0{,}0)$.

<u>Пример 3.</u> Найти область определения функции: $\boldsymbol{z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

Решение. Данная функция имеет действительные значения, если выполняются одновременно два неравенства:

$$\begin{cases} x + y > 0; \\ 1 - x^2 - y^2 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -y; \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases}$$



Первое неравенство $x > -y$ задает часть плоскости, лежащую выше прямой $x = -y$. Второе неравенство $x^2 + y^2 \le 1$ задает внутренность круга, единичного радиуса (R = 1) с центром в начале координат. Пересечение этих областей дает искомую часть области. При этом окружность входит в область, это показано сплошной линией. Прямая в область определения функции не входит, что показано на рис. пунктирной линией.

§2. Предел функции многих переменных в точке по Гейне и по Коши. Повторные пределы. Непрерывность.

Пусть функция $Z = f(M)$ определена на некотором множестве $\{M\}$ и точка $M_0 \in \{M\}$ или $M_0 \notin \{M\}$, но обладает тем свойством, что в любой выколотой δ-окрестности этой точки $\overset{0}{V}_\delta(M_0)$ содержится хотя бы одна точка множества $\{M\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (по Коши). Число A называется *пределом функции* $Z = f(M)$ в точке M_0, если функция $Z = f(M)$ определена в окрестности точки M_0 и для любого $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ такое что при $|M_0 M| < \delta$, $M \ne M_0$ выполняется неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$. Обозначение:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ \dots\dots \\ x_n \to x_n^0}} f(x; y) = A.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ (по Гейне). Число A называется *пределом функции* $Z = f(M)$ в точке M_0, если функция $Z = f(M)$ определена в окрестности точки M_0 и для любой произвольной последовательности $\{M_n\}$ значений $M_n \in \overset{0}{V}_\delta(M_0)$, сходящейся к точке M_0, соответствующая последовательность $\{f(M_n)\}$ значений функции f сходится к A.

Оба определения предела (по Гейне и по Коши) эквивалентны.

Для простоты записи введем понятия повторных пределов только для функции двух переменных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть функция $Z = f(x, y)$ определена в $\overset{0}{V}_{\delta}(M_0)$ и $\forall x \neq x_0 \ \exists \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = a(x)$ Тогда предел $\lim\limits_{x \to x_0} a(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$ называется *повторным пределом*. Аналогично определяется повторный предел $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$.

Теорема (о повторном пределе). Пусть функция $Z = f(x, y)$ определена в $\overset{0}{V}_{\delta}(M_0)$, существует двойной предел $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$ и $\forall x \ \ \exists \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$. Тогда существует повторный предел $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$ равный двойному: $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = \lim\limits_{M \to M_0} f(M)$.

Следствие. Пусть функция $Z = f(x, y)$ определена в $\overset{0}{V}_{\delta}(M_0)$, существует двойной предел $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = A$, $\forall x \ \ \exists \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y)$, $\forall y \ \ \exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$. Тогда существуют оба повторных предела и они равны между собой: $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = \lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $Z = f(M)$ называется *непрерывной в точке* M_0, если предел функции в этой точке существует и равен значению функции в этой точке, т. е.
$\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$ или $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x; y) = f(x_0; y_0)$ (для функции двух переменных)

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется *непрерывной в этой области*. Для непрерывных функций нескольких переменных остаются верными все теоремы о непрерывных функциях одной переменной на отрезке.

§3. Частные производные первого порядка.

Пусть функция $Z = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x; y)$. Придадим переменной x в точке M произвольное приращение Δx, оставляя значение переменной y постоянным. Тогда соответствующее приращение функции $\Delta_x Z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется *частным приращением функции* по переменной x в точке $M(x; y)$. Аналогично определяется частное приращение функции по переменной y: $\Delta_y Z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x Z}{\Delta x}$ $\left(\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y Z}{\Delta y} \right)$, то он называется *частной производной первого порядка* функции $Z = f(M)$ в точке M по переменной x (по переменной y) и обозначается одним из следующих символов:

$$Z'_x, f'_x, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x} \quad \left(Z'_y, f'_y, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Из определения следует, что частная производная функции двух переменных по переменной x представляет собой обыкновенную производную функции одной переменной x при фиксированном значении переменной y. Поэтому частные производные вычисляют по формулам и правилам вычисления производных функции одной переменной.

Теперь рассмотрим общий случай функции n переменных.

Пусть функция f задана в области D и точка $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ принадлежит D. Приращением функции f в точке z называется функция $\Delta_z f$, определяемая равенством

$$\Delta_z f(h) = f(z + h) - f(z).$$

Функция определена для тех $h \in \mathbb{R}^n$, для которых $z + h \in D$. В частности, при достаточно малых h функция $\Delta_z f$ определена, так как точка z — внутренняя для D по определению области в $\mathbb{R}^n$.

Определение *частной производной.*

Пусть функция f задана в области D и точка $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ принадлежит D. Выберем индекс k между 1 и n. Определим функцию одной переменной, фиксировав в f все аргументы, кроме k-го:

$$\zeta(x_k) = f(z_1, \cdots, z_{k-1}, x_k, z_{k+1}, \cdots, z_n).$$

Пусть функция ζ дифференцируема в точке z_k. Тогдаее производная $\zeta'(z_k)$ называется *частной производной функции f в точке z по k-ой переменной.* Она обозначается

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(z_1, z_2, \cdots, z_n).$$

Другими словами, частная производная получается как обычная производная функции f, в которой все аргументы фиксированы, кроме k-го, по которому производная и вычисляется.

У функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может быть всего n частных производных в одной точке. Однако, возможны случаи, когда часть этих производных существует, а часть — нет.

Пример 4. Найти частные производные функции $Z = x^2 - 2xy^2 + y^3$.

Решение. Частную производную $\frac{\partial z}{\partial x}$ находим как производную функции Z=f(x, y) по аргументу x в предположении, что y=const. Поэтому $\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2 - 2xy^2 + y^3)'_x = 2x - 2y^2 + 0 = 2(x - y^2)$.

Аналогично, $\frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 - 2xy^2 + y^3)'_y = 0 - 4xy \ + 3y^2 = y(3y - 4x)$.

Пример 5. $z = arctg\,\frac{y}{x}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение. Рассматривая y как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(arctg\,\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

Рассматривая x как постоянную величину, находим

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(arctg\,\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)'_y = \frac{1}{x\left(1 + (y/x)^2\right)} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Пример 6. $z = xe^{-xy}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение. $\frac{\partial z}{\partial x} = \left(xe^{-xy}\right)'_x = (x)'_x e^{-xy} + x\left(e^{-xy}\right)'_x = e^{-xy} - xye^{-xy} = e^{-xy}(1 - xy)$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \left(xe^{-xy}\right)'_y = -x^2 e^{-xy}$

Пример 7. $z = \frac{\cos y^2}{x}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\left(\dfrac{\cos y^2}{x}\right)'_x=\dfrac{-\cos y^2}{x^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\left(\dfrac{\cos y^2}{x}\right)'_y=\dfrac{-2y\sin y^2}{x}$.

§4. Дифференцируемость. Дифференциал первого порядка. Инвариантность формы первого дифференциала.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Линейной функцией в $\mathbb{R}^n$ называется функция вида

$$\ell(x_1,x_2,\dots,x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n,$$

где a_1, a_2, ..., a_n — некоторые числа.

Определение *дифференцируемой функции в точке.*

Пусть функция f задана в области D и точка $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)$ принадлежит D. Пусть существует такая линейная функция ℓ, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta_z f(h)-\ell(h)}{\|h\|}=0.$$

Тогда функция f называется *дифференцируемой в точке* z, а функция $\ell(h)$ называется *дифференциалом функции* f *в точке* z. □

Обозначения для дифференциала в научной и прикладной литературе стандартизованы на протяжении столетий. А именно, приращение аргумента h всегда обозначается dx, чем подчеркивается, что это дифференциал (d) по переменной x. Это, конечно, вектор: $dx=(dx_1,dx_2,\dots,dx_n)$. Значение линейной функции записывается в виде df, так что

$$df=a_1dx_1+a_2dx_2+\dots+a_ndx_n.$$

Определение дифференциала можно записать также при помощи понятия бесконечно малой функции $o(1)$, как функции, стремящейся к нулю в указанной точке (т.е. при $h\to 0$). Следующая запись условия дифференцируемости функции является наиболее употребительной:

$$f(z+h)=f(z)+a_1h_1+a_2h_2+\dots+a_nh_n+\|h\|o(1)$$

при $h\to 0$.

Иногда записью подчеркивают, что приращение функции примерно равно ее дифференциалу с точностью до бесконечно малой более высокого порядка:

$$f(z+h)-f(z)=df(h)+\|h\|o(1)$$

при $h\to 0$.

Дифференциал и частные производные тесно связаны друг с другом. Пусть функция f дифференцируема в точке $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)$ и дифференциалом функции f в точке z является функция

$$\ell(h)=a_1h_1+a_2h_2+\dots+a_nh_n.$$

Тогда коэффициенты линейной функции – дифференциала равны частным производным функции f.

Теорема. *Формула полного дифференциала.*

Пусть функция f задана в области D, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in D$ и функция f дифференцируема в точке z.

Тогда в точке z существуют все частные производные функции f и дифференциал может быть записан в виде

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

где все частные производные вычисляются в точке z. □

Отдельно каждый $d_{x_i} f = \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ называется *частным дифференциалом* по x_i функции f. Он равняется главной части частного приращения, пропорциональной приращению независимой переменной x_i.

В частности, для функции двух переменных $Z = f(x, y)$ справедливы определения:

Приращение, которое получает функция $Z = f(x, y)$ при произвольных совместных изменениях ее обоих аргументов называется *полным приращением функции* $Z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$:

$$\Delta Z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Частное приращение имеет вид $\Delta_x Z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$, *частный дифференциал* по x: $d_x Z = \frac{\partial Z}{\partial x} \cdot dx,$ соответственно по y: $\Delta_y Z = f(y + \Delta y, x) - f(x, y)$, $d_y Z = \frac{\partial Z}{\partial y} \cdot dy$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Полным дифференциалом* функции двух переменных называется главная часть полного приращения функции, линейная относительно приращений независимых переменных. То есть, полный дифференциал функции двух независимых переменных равен сумме произведений частных производных функции на дифференциалы соответствующих независимых переменных

$$dZ = f'_x(x, y) dx + f'_y(x, y) dy \quad \text{или} \quad dZ = \frac{\partial Z}{\partial x} dx + \frac{\partial Z}{\partial y} dy,$$

$dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y$ (дифференциалы независимых переменных x и y просто равны их приращениям)

Так как $\frac{\partial Z}{\partial x} dx = d_x Z$ и $\frac{\partial Z}{\partial y} dy = d_y Z$, то $dZ = d_x Z + d_y Z$, т.е. дифференциал функции двух независимых переменных равен сумме ее частных дифференциалов.

Справедлива формула приближенных вычислений:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$$

Замечание. Формула полного дифференциала сохраняет своё значение и в том случае, когда переменные x, y являются некоторыми дифференцируемыми функциями от независимых переменных.

Таким образом, у дифференцируемой функции есть все частные производные. Обратное, как правило, тоже верно, но не всегда. Существуют примеры функций, у которых есть все частные производные в точке, но которые в этой точке недифференцируемы, т.е. дифференциала нет.

Теорема **(достаточное условие дифференцируемости).** ***Если функция*** f ***имеет в окрестности точки*** x_0 ***частные производные*** $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, $j = \overline{1, m}$, ***непрерывные в точке*** x_0, ***то она дифференцируема в этой точке.***

Если функция f **дифференцируемая в каждой точке области** D, **то она называется** ***дифференцируемой в области*** D.

Пример 8. $z = \ln(y + \sqrt{x^2 + y^2})$. Найти dz.

Решение. Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\ln(y+\sqrt{x^2+y^2})\right)_x'=\frac{1}{y+\sqrt{x^2+y^2}}\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)_x'=\frac{1}{y+\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\ln(y+\sqrt{x^2+y^2})\right)_y'=\frac{1}{y+\sqrt{x^2+y^2}}\left(1+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

Следовательно, $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=\frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)}+\frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Пример 9. Вычислить приближенно $\sqrt{(1{,}02)^3+(1{,}97)^3}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(X,Y)=\sqrt{X^3+Y^3}$. В нашем случае $X=x+\Delta x$, $Y=y+\Delta y$, где $x=1$, $\Delta x=0{,}02$, $y=2$, $\Delta y=-0{,}03$. Следовательно, $f(1{,}02;1{,}97)\approx f(1{,}2)+df(1{,}2)$.

$f(1{,}2)=\sqrt{1^3+2^3}=\sqrt{9}=3$, $df=f_x'dx+f_y'dy$.

Так как $f_x'=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}$, $f_y'=\frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}$, то получим $df=\frac{3\left(x^2dx+y^2dy\right)}{2\sqrt{x^3+y^3}}$.

Найдем значение дифференциала df в точке $(1{,}2)$.

$$df(1{,}2)=\frac{3}{2\sqrt{1^3+2^3}}\left(1^2\cdot 0{,}02+2^2\cdot(-0{,}07)\right)=\frac{3}{2\cdot 3}\left(0{,}02-0{,}12\right)=-0{,}05\cdot$$

В итоге получим $f(1{,}02;1{,}97)\approx 3-0{,}05=2{,}95$

§5. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

Определение *частных производных высших порядков.*

Пусть D — область в R^n и $f:D\to\mathsf{R}$. Пусть функция f непрерывно дифференцируема в области D. Функции $g_1(x)=\partial f/\partial x_1,\ \ldots,\ g_n(x)=\partial f/\partial x_n$ заданы в области D. Они могут быть также дифференцируемы в D. Их частные производные (если существуют) называются частными производными функции f второго порядка. По индукции определяются частные производные функции f любого целого положительного порядка. □

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\equiv\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right),\ \frac{\partial^3 f}{\partial x^i\partial x^j\partial x^k}\equiv\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^k}\right)\ \text{и т. п.}$$

Частная производная второго порядка по x_i от функции $\partial f/\partial x_j$ есть по определению $\partial(\partial f/\partial x_j)/\partial x_i$. Можно доказать, что если эти частные производные существуют и непрерывны в некоторой области, то порядок дифференцирования несущественен, т.е.

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)}{\partial x_i}=\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}{\partial x_j}.$$

Теорема *о перестановке частных производных.*

Частные производные высших порядков не зависят от последовательности дифференцирований, а зависят только от того, по каким переменным и сколько раз по каждой из них производилось дифференцирование, при условии, что все встречающиеся частные производные непрерывны в рассматриваемой области. □

То есть, если $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^{j_1}\ldots\partial x^{j_k}}$, $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_k}}$ определены в некоторой окрестности точки x и непрерывны в x, а $\{i_1,...,i_k\}$- некоторая перестановка индексов, тогда $\dfrac{\partial^k f(x)}{\partial x^{j_1}\ldots\partial x^{j_k}} = \dfrac{\partial^k f(x)}{\partial x^{i_1}\ldots\partial x^{i_k}}$

Если $i \neq j$, то такая частная производная второго порядка называется смешанной или перекрестной, а если $i = j$, то чистой. В последнем случае она обозначается

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1, \ldots, x_n).$$

Распишем частные производные второго порядка от функции двух переменных $z = f(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xx}(x,y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yy}(x,y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{xy}(x,y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{yx}(x,y).$$

Причем $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$, если производные непрерывны.

Аналогично вычисляются производные более высоких порядков.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция f называется n раз дифференцируемой в точке $x_0 \in D$, если она имеет в некоторой окрестности этой точки все частные производные $(n-1)$-го порядка, каждая из которых является дифференцируемой функцией в точке x_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Дифференциалом второго порядка $d^2 f$ дважды дифференцируемой функции f называется дифференциал от полного (первого) дифференциала $d^2 f = d\,(df)$.

$$d^2 f(x) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x)\,dx^i dx^j.$$

Это квадратичная форма независимых переменных $dx^1,\ldots,dx^n$. Аналогично определяются дифференциалы более высокого порядка. Дифференциал n–го порядка n раз дифференцируемой функции f вычисляется по символической формуле

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}h_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}h_m\right)^n f.$$

где $h_i = dx^i$. В случае функции двух переменных $z = f(x,y)$:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$$

Пример 10. $z = y \cdot \ln x$. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Решение. Найдем частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \ln x$. Дифференцируя повторно, получим

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\ln x) = 0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}.$$

Пример 11. Дана функция $z = ln(x^2 + y^2)$. Проверить, выполняются ли соотношения:

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Решение. 1)

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\left[\ln\left(x^2+y^2\right)\right]'_x=\frac{1}{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)'_x=\frac{2x}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\left[\ln(x^2+y^2)\right]'_y=\frac{1}{x^2-y^2}\left(x^2+y^2\right)'_y=\frac{2y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\left[\frac{2x}{x^2+y^2}\right]'_y=2x\left[\left(x^2+y^2\right)^{-1}\right]'_y=2x(-1)\left(x^2+y^2\right)^{-2}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_y=\frac{-2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot 2y=\frac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2};$$

Подставим полученные производные в указанное соотношение:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2}+\frac{-4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}-\frac{4xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0\ \Rightarrow$$

соотношение выполняется.

2)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left[\frac{2y}{x^2+y^2}\right]'_y=\frac{2y'_y\cdot\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot\left(x^2+y^2\right)'_y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2\cdot\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=$$

$$=\frac{2x^2+2y^2-4y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\frac{2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{2y^2-2x^2+2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{0}{\left(x^2+y^2\right)^2}\equiv 0\ \Rightarrow$$

соотношение выполняется. Итак, оба соотношения выполняются.

Пример 12. $z=x^2\cdot y$. Найти d^3z.

Решение. Найдем частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2xy,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=0,\ \frac{\partial z}{\partial y}=x^2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=0,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=2,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=0.$$

Подставив найденные частные производные в формулу для вычисления d^3z, получим

$$d^3z=0\cdot dx^3+3\cdot 2\cdot dx^2dy+3\cdot 0\cdot dx^2dy+0\cdot dy^3=6dx^2dy$$

§6. Множества уровня. Градиент. Производная по направлению.

Определение *множества уровня.*

Пусть функция f задана на множестве $D\subseteq\mathbb{R}^n$ и C — некоторое число. *Множеством уровня C функции f* называется прообраз $\{C\}$, т.е. множество

$$U_C=\{x\in D\mid f(x)=C\}.$$

Если функция f дифференцируема, то ее множества уровня обычно являются гладкими поверхностями в $\mathbb{R}^n$. В частности, если $n=3$, то множество уровня обычно является поверхностью в трехмерном пространстве. Тогда его называют поверхностью уровня. При $n=2$ множество уровня обычно есть линия на плоскости, и тогда его называют линией уровня.

Линии уровня, определяемые разными числами C, не пересекаются. В совокупности они составляют все множество D, т.е. множество определения функции f. Таким образом, это множество оказывается похожим на "слоеный пирог", в котором на каждом слое значение функции f постоянно.

Определение *градиента.*

Пусть функция f дифференцируема в точке $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда вектор

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x),\ \ldots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$$

называется *градиентом функции f в точке x*. □

В частности, для функции двух переменных:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Градиентом*** функции двух переменных $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется вектор с началом в точке М, имеющий своими координатами значения частных производных функции z в точке М, т. е.

$$\overline{grad\, z} = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M \bar{i} + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M \bar{j}$$

Для обозначения градиента часто используют символ ∇z. Направление градиента функции в данной точке есть направление наибольшей скорости возрастания функции в этой точке.

Для дифференцируемой функции в каждой точке области определения D существует вектор градиента. Этот вектор может меняться по направлению и величине от точке к точке. Получается поле векторов, заданное на множестве D.

Градиенты часто применяются не только в теоретических исследованиях, но и в вычислительных и расчетных работах. Значительную часть современных методов вычислений составляют так называемые градиентные методы. Они основаны на важном свойстве градиента: он перпендикулярен множествам уровня и он указывает направление наискорейшего возрастания функции.

Теорема. *Градиент и линии уровня.*

Пусть функция f задана в области $D \subseteq \mathrm{R}^n$ и $x^0 \in D$. Множество уровня $C = f(x^0)$ функции f обозначим G. Пусть функция f дифференцируема в точке x^0 и $\operatorname{grad} f(x^0) \neq 0$.

Тогда G имеет касательную плоскость в точке x^0 и нормалью к этой гиперплоскости является вектор $\operatorname{grad} f(x^0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Производной функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ в точке M в направлении вектора $\bar{s} = \overline{MM_1}$ называется

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{s}} = \lim_{\left|\overline{MM_1}\right| \to 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{\left|\overline{MM_1}\right|}$$

Если направление $\bar{s}$ задается направляющими косинусами $(\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$, то справедлива формула $\quad \dfrac{\partial z}{\partial \bar{s}} = \dfrac{\partial z}{\partial x_1}\cos\alpha_1 + \ldots + \dfrac{\partial z}{\partial x_n}\cos\alpha_n$.

Для дифференцируемой функции двух переменных $z = f(x, y)$ производная в данном направлении вычисляется по формуле

$$\frac{\partial z}{\partial \bar{s}} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \sin\alpha$$

где α - угол между вектором $\bar{s}$ и осью OX.

Пользуясь определением градиента, последнюю формулу можно представить в виде скалярного произведения: $\dfrac{\partial z}{\partial \bar{s}} = \left(\nabla z, \bar{s}^0\right)$, где вектор $\bar{s}^0$ - орт вектора $\bar{s}$, т. е. производная функции по данному направлению равна скалярному произведению градиента функции на единичный вектор этого направления.

Производная $\frac{\partial z}{\partial \bar{s}}$ в направлении градиента ∇z имеет наибольшее значение равное

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \bar{s}}\right)_{наибольшее} = |\nabla z| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

<u>**Пример 13.**</u> Дана функция $z = x^2 e^y$, точка $A(-1,1)$ и вектор $\bar{s} = \{3,-1\}$. Найти:

1) градиент ∇z в точке А; 2) производную $\frac{\partial z}{\partial \bar{s}}$ в точке А по направлению вектора $\bar{s}$.

Решение. 1. Найдем частные производные функции z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 e^y$$

и вычислим их значения в точке А:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A = -2e, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A = e.$$

Следовательно, $\nabla z = -2e\bar{i} + e\bar{j} = \{-2e, e\}$.

2. Найдем производную по направлению:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \bar{s}}\right|_A = \frac{(\nabla z, \bar{s})}{|\bar{s}|} = \frac{-2e \cdot 3 - 1 \cdot e}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{7e}{\sqrt{10}}$$